УДК 621.87
DOI: 10.15276/pidtt.3.64.2020.06

[1]Човнюк Ю. В., [2]Остапущенко О. П., [2]Кравченко І. М.
[1] *Національний університет біоресурсів і природокористування України*
[2] *Київський Національний університет будівництва і архітектури*

АНАЛІЗ ВПЛИВУ ПАРАМЕТРІВ КРАНОВОГО ВІЗКА З ГНУЧКИМ ПІДВІСОМ ВАНТАЖУ НА ОПТИМАЛЬНИЙ ДИНАМІЧНИЙ РЕЖИМ ЙОГО РУХУ: ІІ. НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ

Анотація. *При русі кранового візка вантаж на гнучкому підвісі здійснює нелінійні коливання, які суттєво впливають як на характер руху самого кранового візка, так і на надійність роботи крана, на його продуктивність і безпечність експлуатації. Усунення коливань вантажу при русі кранового візка є актуальною задачею. Зазвичай проблему усунення нелінійних коливань вирішують для перехідних режимів роботи (механічних систем) у періоди пуску/гальмування, або ж протягом усього періоду руху. Як правило, аналіз впливу параметрів самого візка кранової системи на її оптимальні режими функціонування не розглядається (як у лінійній, так і у нелінійний постановках задачі). Мета дослідження полягає у визначенні оптимального режиму руху кранового візка за динамічним критерієм спеціального виду, який мінімізує нелінійні коливання (їх амплітуду відхилення від вертикалі) вантажу на гнучкому підвісі. Задля розв'язку задачі використані методи класичного варіаційного числення. Проведений аналітичний аналіз рівнянь руху вантажу на гнучкому підвісі у разі наявності вертикальних прискорень точки підвісу (фактично рухомого вантажного візка крана).*

Ключові слова: *крановий візок, вантаж, коливання, нелінійність, оптимальний режим, варіаційна задача, аналіз, гнучкий підвіс, вертикальне прискорення точки підвісу.*

Постановка проблеми.

Відомо[1], що під час руху кранового візка вантаж на гнучкому підвісі здійснює, взагалі кажучі, нелінійні коливання (частота яких залежить від амплітуди коливань). Зрозуміло, що ці коливання нелінійного типу суттєво впливають на характер руху і самого візка, на надійність роботи крана, його продуктивність та безпечність експлуатації кранового обладнання в цілому [2]. Тому усунення нелінійних коливань вантажу на гнучкому підвісі при русі кранового вантажного візка є актуальною задачею.

Аналіз останніх публікацій по темі дослідження.

Проблему усунення (лінійних) коливань вантажу на гнучкому підвісі при русі вантажного візка (наприклад, мостового крана) розглядають і вирішують певними методами аналізу (чисельні/аналітичні підходи) багато авторів наукових праць, зокрема [3-7]. Автори цитованих робіт вказану проблему усунення лінійних коливань розв'язують для перехідних режимів функціонування кранової системи (пуск/гальмування) чи протягом усього періоду руху [8]. Проте у нелінійній постановці ця задача не розглядалась. Крім того, не враховані вертикальні прискорення точки підвісу вантажу на канаті, які неминуче виникають при русі вантажного візка крана й можуть призвести до небажаних резонансних розгойдувань вантажу.

Мета роботи полягає у визначенні умов та параметрів оптимального режиму руху кранового візка за спеціальним динамічним критерієм якості (цього руху), при яких у процессах розгону системи небажані нелінійні коливання вантажу на гнучкому підвісі мінімізовані. При цьому враховуються можливі вертикальні прискорення точки підвісу вантажу на канаті, котрі виникають у вантажному візку крана при його русі вподовж кранової балки.

Виклад основного змісту дослідження.

Вважатимемо, що вантажний візок маси m_1 рухається без тертя вподовж горизонтальної прямої, а маятниковий підвіс завждовжки l з точковою масою m_2 обертається навколо вісі, яка проходить через центр маси візка (рис.1). Оскільки центр мас (точка C) згідно з законом збереження кількості руху рухається по вертикалі, що проходить через цю точку, а також у випадку, коли у початковий момент його горизонтальна швидкість дорівнювала нулю, тоді точка B (точкова маса m_2) буде рухатись вздовж еліптичної лінії (т.з. еліптичний маятник) [10]. Положення візка маси m_1 зручно визначати координатою $x_1 = x_A$, а відхилення підвісу (гнучкого)/канату від вертикалі – визначати кутом φ. Тоді положення точки B (центр маси вантажу m_2) можна подати у вигляді:

$$x_2 = x_A + l \cdot \sin\varphi. \tag{1}$$

В подальшому будемо позначати $x_1 = x_A \equiv x$. Тоді $x_2 = x + l \cdot \sin\varphi$.

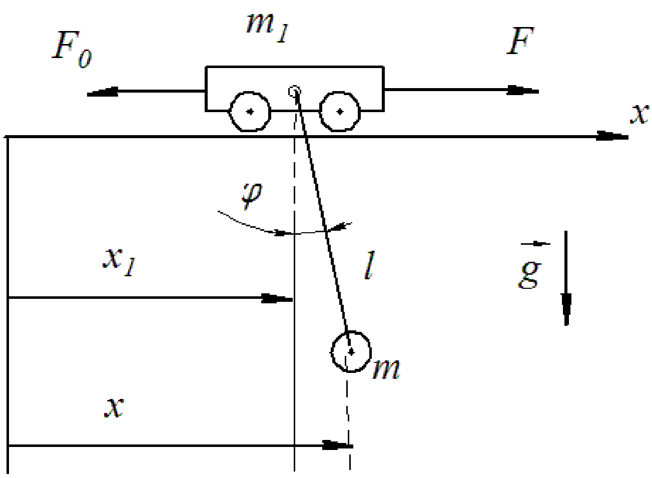

Рисунок 1 Геометрія задачі у нелінійній постановці

($\vec{g}$ прискорення вільного падіння)

Функція Лагранжа L для випадку, зображеного на рис.3, має вигляд:

$$L = \frac{(m_1 + m_2)}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 gl\cos\varphi. \quad (2)$$

Рівняння Лагранжа для x та φ зводяться до наступних:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2 l\{\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\} = 0; \\ \ddot{\varphi} + \dfrac{\left(\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\right)\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2}{\left(1 - \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\cdot\cos^2\varphi\right)} + \\ + \dfrac{\dfrac{g}{l}\sin\varphi}{\left(1 - \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\cos^2\varphi\right)} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Перше рівняння системи (3) легко інтегрується:

 ISSN 2311-0368 (Print)
ISSN 2409-1049 (Online)

$$x = \frac{m_2 \cdot l}{\left(m_1 + m_2\right)} \cdot \sin\varphi . \tag{4}$$

Якщо у початковий момент часу $(t = 0)$ тіло маси m_1 не рухалось, тоді центр мас C завдяки відсутності горизонтальних сил рухається по вертикалі, яка є віссю ординат [10]:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{\left(m_1 + m_2\right)} = x_1 - \frac{m_2 l}{\left(m_1 + m_2\right)} \sin\varphi = 0 . \tag{5}$$

Розглянемо частинні випадки рівняння системи (3) для φ (друге рівняння цієї системи).

1) $\varphi << 1$ малі кути відхилення; $\dot{\varphi} << 1$рад/с малі кутові швидкості обертання маси m_2.

Тоді друге рівняння (3) суттєво спрощується завдяки тому, що $\sin\varphi \approx \varphi;\ \cos\varphi \approx 1;\ \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \to 0$:

$$\frac{m_1 l}{\left(m_1 + m_2\right)} \cdot \ddot{\varphi} + g\varphi = 0 . \qquad .(6)$$

Рівняння (6) має розв'язки у вигляді періодичних коливань з періодом T:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} . \tag{7}$$

Коливання канату з вантажем масою m_2 відбувається з частотою Ω, яка визначається зі співвідношення:

$$\Omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} , \tag{8}$$

тобто $\varphi\left(t\right) \sim \begin{Bmatrix} \sin\Omega t \\ \cos\Omega t \end{Bmatrix}$.

2) При $m_1 >> m_2$ маємо з другого рівняння (3):

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi = 0. \tag{9}$$

Тобто у цьому випадку маємо рівняння нелінійного математичного маятника [11].

3) $m_2 >> m_1$ цей випадок не розглядаємо, як нереальний для практики вантажопідйомних кранів.

Отже, у нелінійній постановці задачі для випадку $m_1 >> m_2$ маємо:

$$\left\{ x_1 = x_A = \frac{m_2 l}{m_1} \cdot \sin\varphi;\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi = 0. \right. \tag{10}$$

З цієї системи рівнянь маємо наступне співвідношення між $x_1 \equiv x$ й $\ddot{\varphi}$:

$$x = x_1 = -\frac{m_2 l^2}{m_1 g} \cdot \ddot{\varphi}. \tag{11}$$

Співвідношення між x_1 й φ (або між x та φ) дозволяють коректно ввести початкові/кінцеві умови руху системи у період її розгону, коли $t \in \left[0, t_p\right]$, де t_p тривалість розгону системи до усталеного режиму руху.

Отже, будемо використовувати у подальшому таку систему співвідношень між x та φ:

$$\left\{ x = \frac{m_2 l}{m_1} \cdot \sin\varphi;\ x = -\frac{m_2 l^2}{m_1 g} \cdot \ddot{\varphi}. \right. \tag{12}$$

Встановимо закон зміни з плином часу t, за якого для $\varphi(t)$ виконується наступний критерій якості руху системи:

ISSN 2311-0368 (Print)
ISSN 2409-1049 (Online)

$$\int_0^{t_p} \varphi^2 dt \to \min . \tag{13}$$

З рівняння системи (10) для $\ddot{\varphi}$ маємо необхідну умову Ейлера-Пуассона наступного виду [9]:

$$\varphi^{(IV)} = 0 . \tag{14}$$

Тоді розшукуємо $\varphi(t)$ у вигляді:

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 . \tag{15}$$

Оскільки для $x(t)$ повинні виконуватись наступні умови:

$$x\big|_{t=0} = 0;\ \dot{x}\big|_{t=0} = 0;\ x\big|_{t=t_p} = \Delta;\ \dot{x}\big|_{t=t_p} = V , \tag{16}$$

де V швидкість усталеного руху візка маси m_1 після закінчення періоду пуску, а Δ шлях, який візок пройде за час, який дорівнює t_p. Тоді, використовуючи рівняння системи (12) та умови (16), можна для визначення коефіцієнтів виразу (15) записати:

$$\varphi\big|_{t=0} = 0;\ \dot{\varphi}\big|_{t=0} = 0;\ \ddot{\varphi}\big|_{t=t_p} = -\frac{\Delta m_1 g}{m_2 l^2};\ \dddot{\varphi}\big|_{t=t_p} = -\frac{V m_1 g}{m_2 l^2} . \tag{17}$$

Тоді, виходячи з умов (17) для коефіцієнтів A_0, A_1, A_2, A_3 виразу (15) маємо:

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0;\ 2A_2 + 6A_3 t_p = -\frac{\Delta m_1 g}{m_2 l^2};\ 6A_3 = -\frac{V m_1 g}{m_2 l^2} . \tag{18}$$

З виразів, поданих у (18), можна легко знайти коефіцієнти A_2 та A_3:

$$A_3 = -\frac{V m_1 g}{6 m_2 l^2};\ \ A_2 = \frac{m_1 g}{2 m_2 l^2}\left\{-\Delta + V t_p\right\} . \tag{19}$$

Таким чином, закон руху системи у нелінійній постановці (для

$m_1 >> m_2$), за якого реалізується критерій якості руху (13) (тобто мінімізуються при розгоні маятникові коливання вантажу), має наступний вигляд у координатах $x(t)$, $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = A_2 t^2 + A_3 t^3; \; x(t) \equiv x_1(t) = \frac{m_2 l}{m_1} \sin\left\{ A_2 t^2 + A_3 t^3 \right\}, \quad (20)$$

де константи A_2 й A_3 знаходимо зі співвідношень (19).

Зазначимо, що розв'язок рівняння для φ у системі (10), коли не приймаються ніякі заходи щодо підвищення якості руху кранового візка з закріпленим на канаті вантажем (зменшення небажаних маятникових коливань вантажу), має наступний вигляд [12-14]:

$$\begin{cases} \varphi(t) = 2\arcsin\left\{ k_1 sn\left[k_1\left(kt + \delta_1 \right), k_1 \right] \right\}, 0 \le k_1 \le 1, k_1^2 = 1 + \dfrac{1}{2}a, \\ -2 \le a < 0, \; T_1 = 4K\left(k_1\right), \varphi_0 = 2\arcsin k_1, \; k = \sqrt{\dfrac{g}{l}}, \end{cases} \quad (21)$$

де: δ_1 довільна фазова постійна при $\varphi(t)$ за наявності режиму коливань, T_1 період коливань, φ_0 амплітуда коливань, sn еліптичний синус, K повний еліптичний інтеграл I-го роду, k_1 модуль еліптичних функцій.

Розглянемо далі можливості керування рухом маятника шляхом зміни прискорення точки його підвісу $(\ddot{s})$. Основне рівняння руху вказаного маятника (у нелінійній постановці) має вид:

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2 \cdot \sin\varphi = -\frac{\ddot{s}}{l} \cdot \cos\varphi, \; \Omega^2 = \frac{g}{l} \quad (22)$$

за початкових умов типу:

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0; \; \dot{\varphi}\big|_{t=0} = \dot{\varphi}_0 . \quad (23)$$

За умови $\varphi << 1$: $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1 - \dfrac{\varphi^2}{2}$. Тому, замість (22) маємо наступне рівняння:

 ISSN 2311-0368 (Print)
ISSN 2409-1049 (Online)

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2 \cdot \varphi - \frac{\ddot{s}}{l} \cdot \frac{\varphi^2}{2} \cong -\frac{\ddot{s}}{l}. \tag{24}$$

Звідси для φ^2 маємо:

$$\varphi^2 \approx \left\{ \ddot{\varphi} + \Omega^2 \cdot \varphi + \frac{\ddot{s}}{l} \right\} \cdot \frac{2l}{\ddot{s}}. \tag{25}$$

Розглянемо співвідношення (25) за умови, коли $\ddot{s} = a = const$, тоді (25) зведеться до виразу:

$$\varphi^2 \approx \left\{ \ddot{\varphi} + \Omega^2 \cdot \varphi + \frac{a}{l} \right\} \cdot \frac{2l}{a}. \tag{26}$$

Розшукаємо закон руху $\varphi(t)$, за якого виконується наступний критерій якості цього руху:

$$\int_0^{t_p} \varphi^2 dt \to \min. \tag{27}$$

Рівняння Ейлера-Пуассона (необхідна умова реалізації критерію (27)) має вид:

$$\Omega^2 + \varphi^{(IV)} = 0 \tag{28}$$

Для розв’язку (28) використаємо початкові умови типу (17). Сам розв'язок розшукуємо у вигляді:

$$\varphi(t) = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 t + \tilde{A}_2 t^2 + \tilde{A}_3 t^3 - \frac{\Omega^2 \cdot t^4}{4!}. \tag{29}$$

Використовуючи умови (17), для коефіцієнтів $\tilde{A}_i$, $i = (0;1;2;3)$, матимемо:

$$\begin{cases} \tilde{A}_0 = 0; \tilde{A}_1 = 0; 2\tilde{A}_2 + 6\tilde{A}_3 t_p - \dfrac{\Omega^2 t_p^2}{2} = -\dfrac{\Delta m_1 g}{m_2 l^2}; \\ 6\tilde{A}_3 - \Omega^2 t_p = -\dfrac{V m_1 g}{m_2 l^2} \end{cases}, \tag{30}$$

звідси отримаємо для $\varphi(t)$ наступний вираз:

$$\begin{aligned}\varphi(t)=&\left\{-\frac{\Omega^2 t_p^2}{4}+\frac{m_1 g}{2m_2 l^2}\cdot\left(-\Delta+Vt_p\right)\right\}\cdot t^2+\\&+\frac{1}{6}\cdot\left(\Omega^2 t_p-\frac{Vm_1 g}{m_2 l^2}\right)\cdot t^3-\frac{\Omega^2 t^4}{24}\end{aligned}. \tag{31}$$

Закон руху $x(t)$ вантажного візка при цьому визначається зі співвідношень (12).

Якщо $\ddot{s}=\ddot{s}(t)$ і , крім того, $s^{(IV)}\neq 0$, тоді у наближенні $\varphi<<1$ й $\cos\varphi\approx 1$, $\sin\varphi\approx\varphi$, рівняння (22) набуває виду:

$$\ddot{\varphi}+\Omega^2\cdot\varphi=-\ddot{s}/l. \tag{32}$$

Розв'язок $\varphi(t)$, який задовольняє критерію якості руху (27), розшукуємо з рівняння Ейлера-Пуассона [9] виду:

$$\varphi^{(IV)}+\frac{s^{(IV)}}{l}=0. \tag{33}$$

(Закон руху точки підвісу вантажу до вантажного візка крана $s(t)$ як мінімум повинен бути сплайном по t четвертого порядку).

Розв’язок $\varphi(t)$ для (33) розшукуємо у вигляді:

$$\varphi(t)=\tilde{\tilde{A}}_0+\tilde{\tilde{A}}_1\cdot t+\tilde{\tilde{A}}_2\cdot t^2+\tilde{\tilde{A}}_3\cdot t^3-\frac{s(t)}{l} \tag{34}$$

Коефіцієнти $\tilde{\tilde{A}}_0$, $\tilde{\tilde{A}}_1$, $\tilde{\tilde{A}}_2$, $\tilde{\tilde{A}}_3$ знаходимо з умов (17), тоді матимемо наступні співвідношення:

ISSN 2311-0368 (Print)
ISSN 2409-1049 (Online)

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{A}}_0 = 0;\ \tilde{\tilde{A}}_1 = 0;\ 2\tilde{\tilde{A}}_2 + 6\tilde{\tilde{A}}_3 \cdot t_p - \dfrac{\ddot{s}\left(t_p\right)}{l} = \dfrac{\Delta m_1 g}{m_2 l^2}; \\ 6\tilde{\tilde{A}}_3 - \dfrac{\dddot{s}\left(t_p\right)}{l} = -\dfrac{V m_1 g}{m_2 l^2} \end{cases}. \qquad (35)$$

Зрозуміло, що $x\left(t\right)$ за закону $\varphi\left(t\right)$, який визначається співвідношеннями (34), (35), можна знайти за допомогою формул (12).

Висновки

1. Обгрунтована нелінійна фізико-механічна та математична моделі, які адекватно описують динаміку кранового візка з гнучким підвісом вантажу, характерну для функціонування мостових кранів.

2. Встановлені закони оптимального динамічного режиму руху розглянутої системи $x\left(t\right)$ (для візка) й $\varphi(t)$ (для вантажу на канаті), за яких мінімізуються у процесі пуску нелінійні коливні процеси (маятникового типу) при відхиленні вантажу на гнучкому підвісі від вертикалі (за умов прискореного руху точки підвісу вантажу, зокрема).

3. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для уточнення і вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку кінематично-силових параметрів та оптимальних режимів (пуску) руху мостових кранів, які мінімізують небажані для функціонування останніх маятникові (нелінійні) коливання вантажу на гнучкому підвісі як на стадіях проектування/конструювання, так і у режимах їх реальної експлуатації.

Список використаної літератури

1.Лобов Н.А. Динамика грузоподъемных кранов/Н.А.Лобов. М.: Машиностроение, 1987. 160 с.

2.Сергеев С.Т. Надежность и долговечность подъемных кранов/С.Т.Сергеев. К.: Техніка, 1968. 238 с.

3.Перельмутер М.М. Устранение колебаний груза, подвешенного к крановой тележке, воздействием на него электроприводом/М.М.Перельмутер, Л.Н.Пляхов//Электромеханика. 1971. №7. С.769-774.

4.Аксенов Л.Б. Синтез системы для гашения колебаний груза/Л.Б.Аксенов//Подъемно-транспортные машины. 1981. №10. С.66-69.

5.Герасимяк Р.П. Оптимальное управление крановым механизмом передвижения/Р.П.Герасимяк, Л.В.Петренко//Автоматика.

Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. 1999. №1. С.87-94.

6.Смехов А.А. Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами/А.А.Смехов, Н.И.Ерофеев. М.: Машиностроение, 1975. 239 с.

7.Ловейкін В.С. Про можливість оптимізації режиму пуску механізму пересування кранового візка за різними критеріями/В.С.Ловейкін, В.Ф.Ярошенко, Ю.О.Ромасевич//Підйомно-транспортна техніка. Дніпропетровськ: ДПТ, 2007. Вип.№3. С.15-23.

8.Ловейкин В.С. Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин/В.С.Ловейкин.К.: УМК ВО, 1990.168 с.

9.Эльсгольц Л.Э.Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление/Л.Э.Эльсгольц. М.: Наука, 1969. 424 с.

10.Кошовий Г.Ш. Класичні та сучасні методи варіаційного числення/Г.І.Кошовий, В.М.Павленко, Б.Л.Голінський. Х.: Національний аерокосмічний університет ім.М.Є.Жуковського "Харківський авіаційний інститут", 2011. 304 с.

11.Бережной Ю.А. Специальные функции теоретической физики/Ю.А.Бережной, А.Г.Гах. Х.: ХНУ, 2011. 124 с.

12.Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям/А.М.Журавский. М.Л.: Изд-во АН СССР, 1941.

13.Янке Е. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы/Е.Янке, Ф.Эмде, Ф.Леш. М.: Наука, 1977.

14. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений/И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. М.: Физматгиз, 1962.

CRANE TROLLEY WITH FLEXIBLE LOAD SUSPENTION PARAMETERS INFLUENCE ANALYSIS ON THE OPTIMAL DYNAMIC MOVEMENT MODE. I: NONLINEAR MODEL

Chovnyuk Y. V., Ostapushchenko O. P., Kravchenko I. M.
Nathional University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine,
Kyiv National University of Construction and Architecture

Annotation. Moving a crane trolley a flexible suspension load carries nonlinear oscillations, which significantly affect both the nature of the crane trolley's movement and the reliability of the crane's operation, its productivity and safety of operation. The load fluctuations elimination of crane truck moving is an urgent task. Usually, the eliminating nonlinear oscillations problem is solved for transient modes operation (mechanical systems) during start-up / braking periods or throughout the entire motion period. As a rule, the analysis of the crane truck parameters influence itself on its optimal operation modes is not considered (both in linear and nonlinear problem formulations). The study purpose is to determine the optimal movement mode of crane truck movement by a dynamic criterion of a special kind that minimizes nonlinear oscillations (their amplitude of deviation from the vertical) on a flexible load suspension. Classical variational calculus methods are used to solve the problem. Analytical equations cargo movement analysis on a flexible suspension movement in the case of vertical suspension point acceleration (actually crane truck moving).

Keywords: crane trolley, load, vibrations, nonlinearity, optimal mode, variational problem, analysis, flexible suspension, suspension point's vertical acceleration.