

УДК 531

Ловейкін В.С., д.т.н.; Човнюк Ю.В., к.т.н.; Кадикало І.О., аспірант
Національний університет біоресурсів і природокористування України

АНАЛІЗ УМОВ ІСНУВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ (АВТОКОЛИВАНЬ) ПРИ РОБОТІ МОСТОВИХ КРАНІВ

Анотація. Проведений обґрунтований аналіз умов виникнення та існування стаціонарних режимів руху (автоколивань), які можливі при роботі мостових кранів. Всебічно досліджені процеси розгойдування вантажу при пуску й гальмуванні вказаних вище кранів, які можуть слугувати причиною виникнення автоколивань.

Ключові слова: аналіз, умови існування, стаціонарні режими, автоколивання, мостові крани.

Аннотация. Проведен обоснованный анализ условий возникновения и существования стационарных режимов движения (автоколебаний), которые возможны при работе мостовых кранов. Всесторонне исследованы процессы раскачивания груза при пуске и торможении указанных выше кранов, которые могут служить причиной возникновения автоколебаний.

Ключевые слова: анализ, условия существования, стационарные режимы, автоколебания, мостовые краны.

Abstract. The reasoned analysis of the conditions of origination and existence of the motion's stationary modes (so called self-oscillations) possible at work regimes of bridge cranes is conducted. The processes of load's swinging during start-up and braking of the above cranes are comprehensively researched. These processes can serve as a cause of self-oscillations.

Key words: analysis, conditions of existence, stationary (steady) modes, self-oscillations, bridge cranes.

Постановка проблеми.

При роботі вантажопідйомних кранів спостерігаються маятникові коливання вантажу, котрі викликають нерівномірний рух кранів чи вантажних візків, додаткові навантаження на силові елементи кранів, створюють незручності при їх експлуатації, що необхідно враховувати при уточнених розрахунках кранів.

У мостових, козлових та деяких інших кранах стандартних параметрів, які переміщуються вздовж рейкового шляху, частота маятникових коливань вантажу відносно крана суттєво нижче частоти пружних коливань кранової металоконструкції й трансмісії механізму

пересування. Навіть при малій довжині виска канатів (не більше трьох метрів) частота маятникових коливань вантажу не перевищує $(2 \dots 2,6) \text{ рад/с}$, у той час як частота пружних коливань кранів у кілька разів, а то й у десятки разів більше.

Отже, маятникові коливання вантажу можна вважати практично незалежними від пружних коливань крана й при їх розрахунку металоконструкцію й трансмісію механізму пересування можна приймати абсолютно жорсткими. При визначенні динамічних навантажень, діючих на металоконструкцію й трансмісію механізму пересування, закон зміни горизонтальної складової натягу канатів, який виникає у результаті маятникових коливань вантажу, можна задати у вигляді відомої функції часу, визначеної по схемі абсолютно жорсткого крану. Зазвичай цей прийом дозволяє знизити порядок рівнянь руху кранової динамічної системи на дві одиниці [1].

Використання мехатронних систем управління рухом вантажних візків мостових кранів дозволяє суттєво зменшити, або, практично, позбутись небажаних маятникових коливань вантажу, які неминуче виникають у перехідних режимах (пуску, гальмування, реверсування) роботи вантажопідйомних механізмів. Проте для визначення стійкості станів рівноваги у цих випадках управління рухом візків мостових кранів не можна користуватись лінеаризованими рівняннями, які описують малі рухи у околі цих станів. Такий аналіз дозволяє лише виявити початкові тенденції збурених рухів, але – у випадках нестійкостей руху – не дозволяє прослідкувати подальший розвиток процесу руху при збільшенні відхилень.

Дослідження руху «у великому» в принципі не можливе за допомогою лінеаризованих рівнянь: нелінійні члени рівнянь (у даній задачі вони обумовлені існуванням сухого (кулонівського) тертя між візком й рейками), які зазвичай досить малі при малих відхиленнях системи від стану рівноваги, починають грати все більшу (значну) роль при збільшенні (зростанні) відхилень; при цьому вид нелінійності суттєво впливає на характер процесу при необмеженому зростанні часу. Зокрема, у багатьох випадках зростання коливань поступово сповільнюється й рух прямує до деякого стаціонарного режиму – режиму автоколивань [2,3]. На думку авторів даного дослідження, питання існування стаціонарних режимів (автоколивань) при пуску/гальмуванні вантажопідйомних механізмів кранів, які моделюються механічною системою типу «вантажний візок – канат – вантаж» (мостового) крану вивчені недостатньо й вимагають подальшого всебічного дослідження.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Автори [4-7] провели дослідження різноманітних аспектів стійкості руху мостових кранів, проте належної уваги питанням виникнення й існування усталених автоколивань у механізмах підйому вантажу мостових кранів не було приділено достатньої уваги. У даному дослідженні будуть частково використані результати робіт [3,4,7].

Мета роботи полягає у встановленні основних закономірностей руху, умов виникнення й стійкості автоколивань вантажопідйомних механізмів мостових кранів у процесах їх пуску/гальмування за наявності сил сухого тертя, що виникають при русі вантажного візка вповдовж рейкового шляху, у межах моделі роботи [4]. При цьому, для досягнення мети роботи використовуються підходи автора [3] (метод припасовування та спосіб поетапного інтегрування для кусково лінійних систем).

Виклад основного змісту дослідження.

1. Розрахунок маятникових коливань вантажу на канатах за схемою двомасової моделі (із врахуванням сил сухого тертя).

У якості аналогової схеми маятникових коливань вантажу використаємо приведену на рис. 1 динамічну модель роботи [4]. (Позначення вказаної моделі збережені у даному дослідженні).

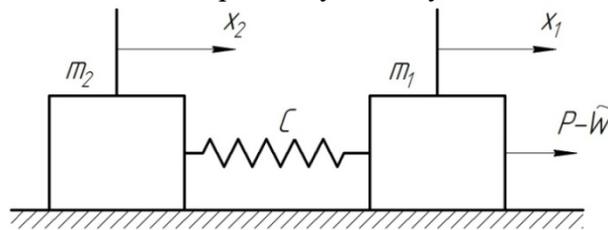


Рис. 1. Аналогова схема маятникових коливань вантажу мостового крана

На рис. 1 введені наступні позначення: m_1 – маса крана чи вантажного візка, приведена до поступального переміщення крана чи візка; m_2 – маса вантажу; $G = m_2 \cdot g$ – вага вантажу; g – прискорення вільного падіння; P – сумарне тягове чи гальмівне зусилля приводних коліс крана чи візка; \tilde{W} – сила опору пересуванню крана чи візка (має нелінійний характер) й описується законом Кулона – Амонтона (сухого тертя)); x_1 й x_2 – горизонтальне переміщення мас m_1 й m_2 ; s – сумарний натяг канатів; φ – кут відхилення канатів від вертикалі; T – горизонтальна складова зусиль у канатах; H – довжина виска канатів.

Оскільки максимальні відхилення канатів від вертикалі не перевищують $(10...12)^\circ$, приймаємо $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1,0$. Із врахуванням цього припущення [4]: $x_2 = x_1 + H \cdot \varphi$, $s = G = m_2 g$, а горизонтальна складова натягу канатів має вид:

$$T = s \cdot \varphi = m_2 g \cdot (x_2 - x_1) / H. \quad (1)$$

Рівняння руху крана має вид:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \frac{m_2 g}{H} \cdot (x_1 - x_2) = P - \tilde{W}, \quad \tilde{W} = W \cdot \text{sign}(\dot{x}_1), \quad (2)$$

а рівняння руху вантажу у горизонтальному напрямку:

$$m_2 \ddot{x}_2 + \frac{m_2 g}{H} \cdot (x_2 - x_1) = 0. \quad (3)$$

У (2) W – амплітуда сили сухого тертя ковзання.

На схемі, зображеній на рис. 1, в межах приведеної динамічної моделі, маса m_2 ковзає вдовж опорної поверхні без тертя. Рух цієї системи описується наступними рівняннями:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + C \cdot (x_1 - x_2) = P - W \cdot \text{sign}(\dot{x}_1); \\ m_2 \ddot{x}_2 + C \cdot (x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Порівнюючи систему (4) з системою рівнянь (2) й (3), бачимо, що обидві системи ідентичні, якщо прийняти $C = m_2 g / H$. Звідси випливає, що динамічна дія вантажу, який коливається, на кран (чи візок) аналогічна дії вантажу, прикріпленого за допомогою пружини із жорсткістю, яка чисельно дорівнює G/H . Ця аналогія дозволяє наочно оцінити вплив вантажу, який розгойдується, на рух крану. Коли $x_2 > x_1$, вантаж, що відхиляється, збільшує сили опору пересуванню крану. Коефіцієнт $C = G/H$ можна назвати аналогом коефіцієнту поперечної жорсткості канатів.

1.1 Модель Н.А. Лобова [4] руху крана із гнучко підвішеним вантажем у період його розгону. Уточнений варіант.

Оскільки період маятникових коливань вантажу більше чи одного порядку з тривалістю у часі розгону крана, при розв'язуванні (4) можна прийняти, що рушійна сила приводного двигуна механізму пересування постійна й дорівнює середньому пусковому значенню. Крім того, врахуємо, що у системі «вантажний візок – канат – вантаж» на візок й на вантаж діють сили в'язкого тертя, пропорційні відповідно до швидкості руху візка ($b \cdot \dot{x}_1$) й швидкості руху вантажу ($b \cdot \dot{x}_2$). Тут, у формулі для сили в'язкого тертя b – коефіцієнт в'язкого опору. Оскільки при виконанні умови $\dot{x}_2 > \dot{x}_1$ сили сухого тертя сприяють рухові візка, а не гальмують його, правильніше, на думку авторів даного дослідження, для \tilde{W} використовувати формулу: $\tilde{W} = W \cdot \text{sign}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$. Далі, зважаючи на все, що наведене вище, систему рівнянь, які описують рух вантажопідйомного механізму мостового крану вдовж рейкового шляху, можна звести до одного рівняння другого порядку відносно різниці переміщень мас $q = x_1 - x_2$:

$$\ddot{q} + \tilde{b} \cdot \dot{q} + \omega^2 \cdot q = \{P - W \cdot \text{sign}(\dot{q})\} / m_1, \quad (5)$$

де: q – горизонтальне переміщення вантажу відносно рухомої точки підвісу; $\omega^2 = \left\{ \frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{m_1 \cdot H} \right\}^1$ – квадрат частоти власних маятникових

коливань вантажу відносно крана у період розгону; $\tilde{b} = b \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$.

Власні коливання системи «вантажний візок – канат – вантаж» мостового крана (при $P \equiv 0$) описується наступним рівнянням:

$$\ddot{q} + \tilde{b} \cdot \dot{q} + \omega^2 \cdot q + \frac{W}{m_1} \cdot \text{sign}(\dot{q}) = 0. \quad (6)$$

Введемо позначення: $h = \tilde{b}/2$, $k_* = \sqrt{\omega^2 - h^2}$.

Якщо $\dot{q} > 0$, тоді рівняння (6) перетворюється у:

$$\ddot{q} + \tilde{b} \cdot \dot{q} + \omega^2 \cdot q = -\frac{W}{m_1}. \quad (7)$$

Якщо $\dot{q} < 0$, тоді замість (6) матимемо:

$$\ddot{q} + \tilde{b} \cdot \dot{q} + \omega^2 \cdot q = +\frac{W}{m_1}. \quad (8)$$

Розв'язок рівняння (7) за початкових умов $q|_{t=0} = A_o$, $\dot{q}|_{t=0} = 0$ має вид:

$$q = \left(A_o + \frac{W}{m_1 \cdot \omega^2} \right) \cdot e^{-ht} \cdot \left\{ \cos(k_* \cdot t) + \frac{h}{k_*} \sin(k_* \cdot t) \right\} - \frac{W}{m_1 \omega^2}. \quad (9)$$

Далі знаходимо швидкість:

$$\dot{q} = - \left(A_o + \frac{W}{m_1 \cdot \omega^2} \right) \cdot e^{-ht} \cdot \frac{k_*^2}{k_*} \cdot \sin(k_* \cdot t), \quad k \equiv \omega. \quad (10)$$

Момент часу, коли швидкість перетворюється у нуль, визначається з рівняння:

$$k_* \cdot t_1 = \pi, \quad (11)$$

причому координата q приймає значення:

$$q = A_{1/2} = -A_o \cdot \exp\left(-\frac{\pi h}{k_*}\right) - \frac{W}{m_1 \omega^2} \cdot \left(1 + e^{-\frac{\pi h}{k_*}} \right). \quad (12)$$

На наступному інтервалі часу швидкість від'ємна, й замість (6) маємо (8).

Для цього інтервалу часу при переміщеному у точку t_1 початку відліку часу маємо:

$$\begin{cases} q = \left(A_{1/2} - \frac{W}{m_1 \omega^2} \right) \cdot e^{-ht} \cdot \left\{ \cos(k_* t) + \frac{h}{k_*} \sin(k_* t) \right\} + \frac{W}{m_1 \omega^2}, \\ \dot{q} = - \left(A_{1/2} - \frac{R}{c} \right) \cdot e^{-ht} \cdot \frac{k_*^2}{k_*^2} \sin(k_* t) \end{cases} \quad (13)$$

Коли $\dot{q} = 0$ знову ($t = \tilde{t}_1$), виконується рівність:

$$k_* \cdot \tilde{t}_1 = \pi, \quad (14)$$

а координата q дорівнює:

$$q = A_1 = -A_{1/2} \cdot e^{-\pi h/k_*} + \frac{W}{m_1 \omega^2} \cdot \left(1 + e^{-\pi h/k_*} \right) \quad (15)$$

Підставляючи сюди вираз (12) знайдемо зв'язок між двома послідовними додатними відхиленнями ($q > 0$):

$$A_1 = A_o \cdot \exp \left\{ -\frac{2\pi h}{k_*} \right\} + \frac{W}{m_1 \omega^2} \cdot \left(1 + e^{-\frac{\pi h}{k_*}} \right)^2 \quad (16)$$

причому тривалість одного циклу (період автоколивань) складає $2\pi/k_*$. У стаціонарному режимі повинно бути $A_1 = A_o = A_{cm}$. Звідси знаходимо:

$$A_{cm} = \frac{W_1}{m_1 \omega^2} \cdot \frac{\left(1 + e^{-\pi h/k_*} \right)}{\left(1 - e^{-\pi h/k_*} \right)} = \frac{W}{m_1 \omega^2} \cdot \operatorname{cth} \left\{ \pi h / (2k_*) \right\}. \quad (17)$$

При малих значеннях відношення h/k_* , тобто $h/k_* \ll 1$, можна вважати, що амплітуда стаціонарних власних автоколивань системи «вантажний візок – канат – вантаж» мостового крану складає:

$$A_{cm} \approx \frac{2 \cdot W \cdot k}{m_1 \cdot \omega^2 \cdot \pi \cdot l} = \frac{2 \cdot W \cdot \omega}{m_1 \cdot \omega^2 \cdot \pi \cdot (\tilde{b}/2)} = \frac{4W}{m_1 \cdot \omega \cdot \pi \cdot \tilde{b}}. \quad (18)$$

Період таких власних автоколивань розглядуваної системи складає:

$$T_{авток} = 2\pi/k_* = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - h^2}. \quad (19)$$

При $h/k_* \ll 1$ замість (19) маємо:

$$T_{авток} = \frac{2\pi}{\omega} = T_{власн}, \quad (20)$$

де $T_{власн}$ – період власних коливань системи, тобто у даному випадку виникає резонанс автоколивань розглядуваної системи з її власними коливаннями. Залежність $q(t)$ та сили опору $F(\dot{q})$ за наявності сил в'язкого й сухого тертя у системі наведені на рис. 2.

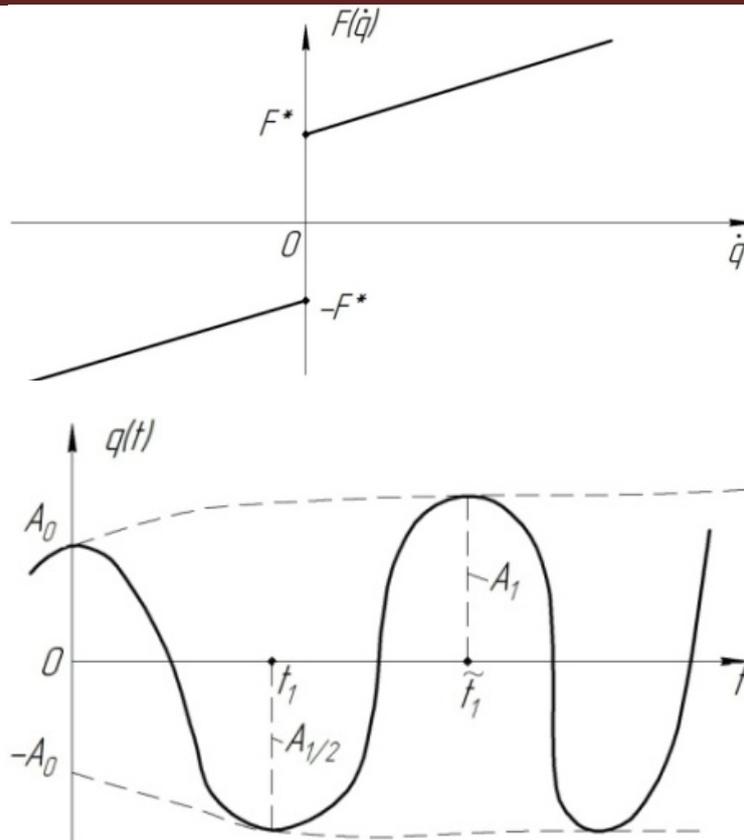


Рис. 2. Залежність сили опору $F(\dot{q})$ та $q(t)$: а – $F(\dot{q})$; б – $q(t)$.

На рис. 2 $F^* = \left(\frac{W}{m_1}\right) \cdot m_1 \equiv W$.

1.2. Аналіз автоколивань при $P \neq 0$.

При аналізі автоколивань системи у цьому випадку можна використати попередній підхід, реалізований у п. 1.1.

Значення амплітуди стаціонарних коливань (автоколивань) системи буде мати вигляд:

$$\tilde{A}_{cm} = \frac{W}{m_1 \omega^2} \cdot \frac{(1 + e^{-\pi h/k_*})}{(1 - e^{-\pi h/k_*})} + \frac{P}{m_1 \omega^2} = \frac{W}{m_1 \omega^2} \cdot \operatorname{cth} \left\{ \frac{\pi h}{2k_*} \right\} + \frac{P}{m_1 \omega^2}. \quad (21)$$

Формула для $T_{автоок}$ (19), (20) та умови виникнення резонансу автоколивань системи з її власними коливаннями залишаються тими ж самими.

2. Аналіз умов виникнення стаціонарних автоколивань у механічній системі «вантажний візок – канат – вантаж» мостового крана у разі виникнення зупинки візка внаслідок його нараження на випадкову перешкоду.

Розглянемо поведінку системи, зображеної на рис. 1, при умові $P - \tilde{W} = 0$ й спільному синхронному русі візка й вантажу зі швидкістю

V_o , забезпеченого мехатронними системами управління, у разі нараження візка на випадкову перешкоду, розміщену на рейковому шляху. У цьому випадку ведучим ланцюгом є вантаж на канаті, який через пружину C призводить до руху візка (m_1). Між візком і поверхнею, вдовж котрої він ковзає, розвивається сила сухого тертя (в'язким тертям нехтуємо); характеристика тертя має вид, зображений на рис. 3, й схематично відображає відому з експериментів відмінність між граничною силою тертя спокою (R_1) й силою тертя руху (R_2), $R_2 < R_1$.

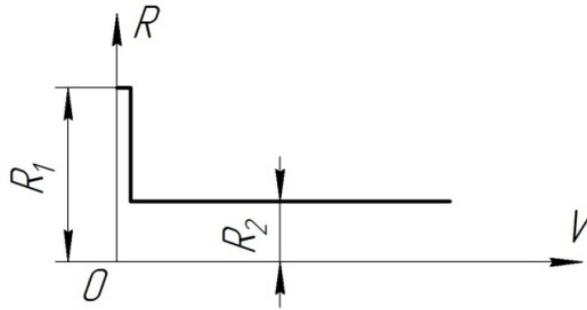


Рис. 3. Залежність сили тертя (R) від V (швидкості руху тіла).

Введемо наступні позначення: V_o – швидкість руху ведучого ланцюга (у даному випадку це вантаж на канаті); C – коефіцієнт жорсткості пружини, $C = \frac{m_2 g}{l}$, де m_2 – маса вантажу; l – довжина канату; g – прискорення вільного падіння; m_1 – маса візка;

$\Omega^2 = C \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$; R_1 – гранична сила тертя спокою; R_2 – сила

тертя руху. Зрозуміло, що можливий такий рух розглядуваної системи, при якому швидкість візка також дорівнює V_o (це забезпечують мехатронні системи управління). При цьому пружина (канат) стиснута постійною силою P , яка дорівнює силі тертя руху R_2 . Однак, як можна впевнитись нижче, цей режим може виявитись нестійким й при певних обставинах навколо нього виникають автоколивання.

Якщо швидкість V_o невелика, тоді будь – яка випадкова перепона може виявитись достатньою для зупинки візка. Розглянемо, що відбувається після цього моменту.

Вихідна математична модель руху даної системи має наступний вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + C(x_1 - x_2) = F(t) - R_2 \cdot \text{sign}(\dot{x}_1); \\ m_2 \ddot{x}_2 + C(x_2 - x_1) = 0, \end{cases} \quad (22)$$

де $F(t)$ – рушійна сила, прикладена до візка (m_1). Величини $x_{1,2}$ введені вище у моделі (4).

Введемо позначення: $s = x_1 - x_2$; $\dot{s} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$; $\ddot{s} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2$, тоді замість (22) на етапі руху зі стану спокою ($\dot{x}_1 > 0$) маємо:

$$\ddot{s} + \Omega^2 \cdot s = \frac{F(t)}{m_1} - \frac{R_2}{m_1}. \quad (23)$$

Будемо вважати, що на етапі розгону $F(t) = F_o$ [4], тоді розв'язок (23) шукаємо у вигляді:

$$s(t) = \tilde{A}_1 \cdot \sin(\Omega t) + \tilde{A}_2 \cdot \cos(\Omega t) + \frac{F_o - R_2}{m_1 \Omega^2}, \quad (24)$$

де \tilde{A}_1 й \tilde{A}_2 – константи, що визначаються з початкових умов задачі.

Оскільки до зупинки, викликаною випадковою перепоною на рейковому шляху візка, рух візка й вантажу був синхронним (це забезпечує мехатронна система керування режимом роботи двигуна візка), тоді: $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = V_o$ й $\dot{s} = 0$, $x_1 = x_2$ й $s = 0$. Будемо відлік часу вести саме від цього моменту. Тоді із врахуванням даних початкових умов розв'язок (24) має наступний вигляд:

$$s(t) = \frac{(F_o - R_2)}{m_1 \Omega^2} \cdot [1 - \cos \Omega t], \quad \dot{s}(t) = \frac{(F_o - R_2)}{m_1 \cdot \Omega^2} \cdot \Omega \cdot \sin \Omega t. \quad (25)$$

При рівномірному русі візка (до його повної зупинки перед випадковою перепоною на рейковому шляху) $F_o = R_2$, тому $\dot{s}(t) = 0$ й рух дійсно рівномірний (у візка й у вантажу, тобто $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = V_o$).

Після зупинки візка ведучим ланцюгом стає вантаж m_2 на канаті, який буде розтягувати пружину C до тих пір, поки сила розтягу $P(t)$ не зрівняється з силою тертя спокою R_1 . Після цього відбувається зрив вантажного візка, причому сила тертя миттєво зменшується до значення R_2 . Але сила розтягу пружини у перший момент руху візка, який почнеться, буде все ще рівною R_1 , й відповідно, рівновага сил, діючих на вантажний візок, порушується.

Якщо сумістити з моментом зриву візка початок відліку часу $t = 0$, а також прийняти до уваги, що у цей момент s , як і швидкість \dot{s} : $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) \neq 0$ (відлік переміщень будемо вести від місця зупинки вантажу), тоді: $\dot{s}|_{t=0} = -V_o$, бо $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = V_o$.

Розглянемо тепер процес наступного руху (після раптової зупинки на рейках вантажного візка). До деякого моменту часу $t > 0$ довжина пружини C зміниться на відрізок $s + V_o \cdot t$ і відповідно сила пружності пружини зменшиться до значення:

$$P(t) = R_1 - C(s + V_o t) = R_1 - Cs - CV_o t. \quad (26)$$

Таким чином, диференціальне рівняння руху візка масою m_1 запишеться у вигляді:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = R_1 - C \cdot s - C \cdot V_o t - R_2, \quad (27)$$

або:

$$\ddot{x}_1 = \frac{R_1}{m_1} - \frac{C \cdot s}{m_1} - \frac{C \cdot V_o t}{m_1} - \frac{R_2}{m_1}, \quad (28)$$

Після введення заміни $\omega_{o1}^2 = \frac{C}{m_1} = \frac{m_2 g}{l \cdot m_1} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{g}{l}$ рівняння (28)

можна записати наступним чином:

$$\ddot{x}_1 + \omega_{o1}^2 \cdot s = -\frac{C \cdot V_o \cdot t}{m_1} + \frac{(R_1 - R_2)}{m_1}. \quad (29)$$

Аналогічним чином рівняння для x_2 набуває виду:

$$\ddot{x}_2 + \omega_{o2}^2 \cdot s \cdot (-1) + (-1) \cdot \frac{C \cdot V_o \cdot t}{m_2} = 0, \quad \omega_{o2}^2 = \frac{C}{m_2} = \frac{m_2 g}{m_2 \cdot l} = \frac{g}{l} \quad (30)$$

З рівнянь (29), (30) складемо систему:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_{o1}^2 \cdot s = -\frac{C \cdot V_o \cdot t}{m_1} + \frac{(R_1 - R_2)}{m_1}; \\ \ddot{x}_2 - \omega_{o2}^2 \cdot s = \frac{C \cdot V_o \cdot t}{m_2}. \end{cases} \quad (31)$$

Цю систему (31) дуже легко звести до одного диференціального рівняння:

$$\ddot{s} + (\omega_{o1}^2 + \omega_{o2}^2) \cdot s = -(\omega_{o1}^2 + \omega_{o2}^2) \cdot V_o \cdot t + \frac{(R_1 - R_2)}{m_1}. \quad (32)$$

Розв'язок (32) із врахуванням початкових умов: $s(0) = 0, \dot{s}(0) = -V_0$ має вид:

$$s(t) = \frac{(R_1 - R_2)}{m_1(\omega_{o1}^2 + \omega_{o2}^2)} \cdot \left\{ 1 - \cos \left[\sqrt{\omega_{o1}^2 + \omega_{o2}^2} t \right] \right\} - V_o t. \quad (33)$$

Тоді для кожного з елементів системи (m_1 й m_2) маємо наступні диференціальні рівняння:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_{o1}^2 \cdot s(t) - \frac{CV_o t}{m_1} + \frac{(R_1 - R_2)}{m_1}; \\ \ddot{x}_2 = \omega_{o2}^2 \cdot s(t) + \frac{CV_o t}{m_2}. \end{cases} \quad (34)$$

Розглянемо, як виглядає закон руху візка, за початкових умов: $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$. Для цього треба проінтегрувати перше рівняння системи (34).

Закон руху візка $x_1(t)$ має наступний вид:

$$x_1(t) = \frac{\omega_{o1}^2 \cdot (R_1 - R_2)}{m_1 (\omega_{o1}^2 + \omega_{o2}^2)^2} \cdot \left[1 - \cos \left\{ \sqrt{\omega_{o1}^2 + \omega_{o2}^2} \cdot t \right\} \right] + \frac{(R_1 - R_2)}{m_1} \cdot \frac{\omega_{o2}^2 \cdot t^2}{2 \cdot (\omega_{o1}^2 + \omega_{o2}^2)}. \quad (35)$$

Отже, після зупинки рух візка буде носити коливний характер і віддаляться від точки початку руху ($x_1 = 0$). Рівність (35) можна записати інакше:

$$x_1(t) = \frac{(R_1 - R_2) \cdot \omega_{o1}^2}{m_1 \cdot (\omega_{o1}^2 + \omega_{o2}^2)^2} \cdot 2 \cdot \sin^2 \left\{ \frac{\sqrt{\omega_{o1}^2 + \omega_{o2}^2} \cdot t}{2} \right\} + \frac{(R_1 - R_2) \cdot \omega_{o2}^2 \cdot t^2}{2m_1 \cdot (\omega_{o1}^2 + \omega_{o2}^2)}. \quad (36)$$

Рис. 4 відображає закон руху вантажного візка $x_1(t)$ (36) після того, як буде здолана перепона (випадкова), що з'явилась на рейковому шляху.

У точках, де виконується співвідношення:

$$\frac{\sqrt{\omega_{o1}^2 + \omega_{o2}^2} \cdot t_i}{2} = \frac{\pi}{2} + i\pi, \quad i = 0, 1, 3, 4, \dots \quad (37)$$

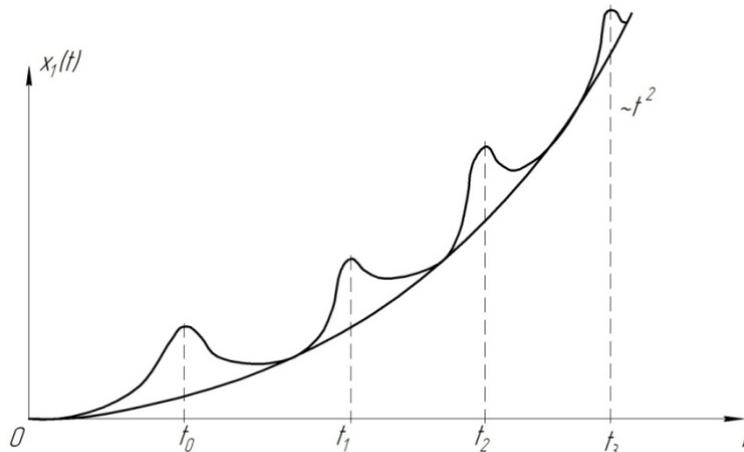


Рис. 4. Закон руху $x_1(t)$ (36).

з'являються локальні максимуми $x_1(t)$, що лежать безпосередньо на параболі ($\sim t^2$).

Висновки

1. Обґрунтована модель і досліджені умови виникнення стаціонарних режимів руху (автоколивань) при пуску вантажопідйомних механізмів мостових кранів.
2. Встановлені основні характеристики автоколивань (амплітуда та період) та їх залежність від параметрів вантажопідйомного механізму мостового крану.
3. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку вантажопідйомних механізмів кранів мостового типу у межах моделі «вантажний візок – канат – вантаж», а також для розробки засобів й методів гасіння небажаних автоколивань, які можуть виникати у вказаних механічних системах, як на стадіях їх проектування / конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний / Л.И. Мандельштам. – М.: Наука, 1972. – 418 с.
2. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы / К.Ф. Теодорчик. – М.: Наука, 1965. – 320 с.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 272 с.
4. Лобов Н.А. Динамика грузоподъемных кранов / Н.А. Лобов – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.
5. Казак С.А. Динамика мостовых кранов / С.А. Казак – М.: Машиностроение, 1968. – 472 с.
6. Зубов В.И. Устойчивость движения / В.И. Зубов. – М.: Высшая школа, 1973. – 271 с.
7. Лобов Н.А. Об устойчивости движения мостовых кранов / Н.А. Лобов // Трубы МВТУ м.м. Н.Э. Баумана. – 1977. – №225. – с. 3 – 24